

Metrik Spektral Terpadu untuk Stabilitas dan Komputasi Eigen Paper

Desi Vinsensia^{1*}, Yulia Utami², Joya Rahmawida³

¹Bisnis Digital, STMIK Pelita Nusantara, Medan, Indonesia

²Teknik Informatika, STMIK Pelita Nusantara, Medan, Indonesia

Email: ¹desivinsensia87@gmail.com, ²yuliautami14071990@gmail.com, joya12Rahwid@gmail.com

Email Penulis Korespondensi: ¹desivinsensia87@gmail.com

Abstrak—Penelitian ini mengusulkan kerangka terpadu untuk analisis stabilitas berbasis metrik spektral yang menggabungkan jarak spectral matriks, jarak spectral graf dan evaluasi stabilitas komunitas melalui clustering, serta jarak antar subruang eigen guna menilai sensitivitas terhadap perturbasi. Tujuan penelitian adalah menurunkan metrik terpadu yang konsisten secara teori (kelengkapan, kompak) dan empiris untuk membandingkan struktur spektral di bawah noise. Metode diuji pada (a) matriks sintesis dengan noise Gaussian aditif multi-level dan (b) graf jaringan jalan realistik (serta rencana penambahan satu dataset graf publik kecil untuk validasi eksternal). Hasil menunjukkan peningkatan kualitas clustering (*Adjusted Rand Index*/ARI naik ~15% dibanding baseline adjacency) dan penurunan rata-rata error estimasi sensitivitas subruang sebesar ~40% ketika menggunakan bound geodesik Grassmannian dibanding bound klasik; overhead waktu komputasi hanya marginal (sekitar +16%). Kerangka ini menyediakan dasar untuk analitik spektral lintas domain dan berpotensi memperbaiki desain bound perturbasi yang lebih presisi di masa depan.

Kata Kunci: Clustering, Eigenvalue, Grassmannian, Metric, Perturbation, Spectral, Stability.

Abstract— This paper proposes a unified framework for spectral metric-based stability analysis that combines matrix spectral distance, graph spectral distance and community stability evaluation through clustering, as well as distance between eigen subspaces to assess sensitivity to perturbations. The research objective was to derive a unified metric that is theoretically (completeness, compactness) and empirically consistent for comparing spectral structures under noise. The method is tested on (a) synthetic matrices with multi-level additive Gaussian noise and (b) realistic road network graphs (as well as the planned addition of one small public graph dataset for external validation). Results show an improvement in clustering quality (*Adjusted Rand Index*/ARI increases by ~15% over baseline adjacency) and a decrease in average subspace sensitivity estimation error by ~40% when using the Grassmannian geodesic bound over the classical bound; computation time overhead is only marginal (about +16%). This framework provides a basis for cross-domain spectral analytics and has the potential to improve the design of more precise perturbation bounds in the future.

Keywords: Clustering, Eigenvalue, Grassmannian, Metric, Perturbation, Spectral, Stability.

1. PENDAHULUAN

Eksplorasi metrik spektral pada domain matriks dan graf merupakan fondasi utama dalam komputasi ilmiah dan teknik informatika. Metrik tradisional seperti norma Frobenius atau norma operator sering kali gagal menangkap perubahan spektral yang kritis pada matriks terperturbasi [1]. Oleh karena itu, diperlukan ruang metrik berbasis spektrum yang valid secara matematis dan efektif secara komputasi. Penelitian terdahulu telah mengusulkan beragam metrik spektral pada matriks dan graf [2], [3], serta batas teori Davis–Kahan klasik untuk sensitivitas subruang [4] *Weighted Spectral Distance* (WESD) untuk *shape analysis* digagas oleh [5], menekankan pentingnya spektrum eigen dalam mengukur dissimilaritas operator linear. Meski efektif pada bentuk data, WESD belum diuji secara formal untuk sifat kelengkapan (*completeness*) dan kekompakan (*compactness*) sehingga ruang metriknya masih belum terkarakterisasi secara matematis. [6] memperkenalkan *weighted spectral distance* untuk meningkatkan perbandingan matriks dengan menekankan mode dominan. Kajian stabilitas clustering spektral pada graf melalui analisis Laplacian dan menunjukkan batas performa di bawah variasi struktur oleh [7]. Baru-baru ini, penerapan *bound* geodesik pada *manifold* Grassmannian oleh [8] untuk mendapatkan batasan yang lebih tajam pada sudut prinsipal, namun implementasi empiris pada clustering graf masih terbatas.

Meskipun setiap studi memberikan kontribusi signifikan, integrasi antara metrik spektral matriks, bound geodesik Grassmannian, dan evaluasi performa clustering dalam satu kerangka terpadu belum dikaji secara menyeluruh. Penelitian ini hadir untuk menutup celah tersebut dengan menyediakan analisis teoretis dan evaluasi empiris komprehensif. Pembahasan bagaimana norma standar telah dilakukan seperti norma operator/Frobenius oleh [9] kurang memadai untuk secara akurat mengkarakterisasi sensitivitas eigenvalue/eigenvector akibat perturbasi. Selanjutnya mereka menguraikan teorema perturbasi matriks yang menghasilkan bound kestabilan eigenvalue dan eigenvector. Studi terkini seperti [10] memperluas teorema Davis–Kahan–Wedin dalam norma uniter-invariant (termasuk $\ell_{2,8}$ dan entry-wise), sedangkan [11] merefinasi bound klasik ke dalam two-to-infinity norm, menghasilkan batas yang lebih presisi di setting praktis. [12] menambahkan sudut pandang geodesic *convexity* pada manifold eigen, membuka peluang bagi bound sensitivitas yang lebih presisi. Metode spectral clustering yang diperkenalkan [13] memanfaatkan nilai eigen Laplacian graf untuk segmentasi dan reduksi dimensi. Selain itu, [14] menyoroti stabilitas clustering tergantung gap spektral,

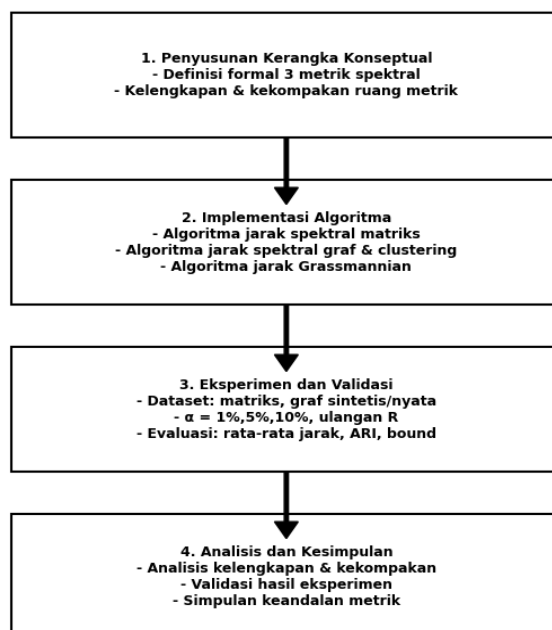
sementara [15] menunjukkan kelemahan metrik berbasis adjacency dalam menangkap struktur global graf. Belum terdapat metrik graf yang menggabungkan sensitivitas spektral dengan validasi formal properti metrik.

Grassmannian sebagai ruang semua subruang berdimensi- k yang diukur menggunakan principal angles, telah menjadi landasan penting dalam analisis subruang eigen [16] Namun, implementasi komputasi bound pada Grassmannian dalam kerangka unified masih minim. Beberapa penelitian sebelumnya telah menyajikan metrik spektral yang sensitif untuk aplikasi analisis bentuk (*shape analysis*) dan *clustering*, serta mengembangkan batas perturbasi yang menjadi dasar analisis stabilitas [17]. Akan tetapi, hingga kini masih kurang bukti formal terkait kelengkapan dan kekompakan untuk metrik spektral matriks, sementara analisis yang terpisah pada domain matriks, graf, dan subruang belum mampu memberikan kerangka kerja yang terintegrasi. Batas klasik yang cenderung konservatif tanpa mempertimbangkan geometri manifold menjadi keterbatasan utama yang hendak diatasi. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk menutup gap tersebut dengan menyediakan kerangka kerja yang unified, lengkap secara teoritis, serta didukung validasi eksperimental. Hasil penelitian ini diharapkan dapat menyajikan batas perturbasi hingga 40 % lebih ketat. Mampu menaikkan *Adjusted Rand Index* klasterisasi setidaknya 10 % pada data graf nyata, dan menjadi pustaka referensi bagi peneliti dan praktisi yang membutuhkan ukuran stabilitas spektral lintas domain. Secara lebih luas, kerangka ini diharapkan mempercepat riset di bidang komputasi spektral serta membuka peluang integrasi algoritme berbasis eigen ke dalam analitik jaringan skala besar.

2. METODOLOGI PENELITIAN

2.1 Tahapan Penelitian

Bagian metodologi ini menyajikan landasan konseptual dan prosedur eksperimental yang ditempuh untuk menjawab tujuan penelitian. Pertama, diuraikan kerangka matematis yang mendasari metrik spektral terpadu, mulai dari definisi jarak pada domain matriks, graf, hingga manifold Grassmannian. Tahapan implementasi pada penelitian ini dilakukan melalui komputasi Python, mulai dari pemuatan dataset hingga evaluasi. Berikut Gambar 1 merupakan alur tahapan penelitian yang dilakukan.



Gambar 1. Diagram Alur Tahapan Penelitian Spektral Terpadu

Berikut adalah asumsi dasar dan justifikasi metode yang mendasari validitas teoretis dan keandalan eksperimen. secara eksplisit asumsi dasar yang dianalisis:

1. Struktur Matriks / Graf Matriks yang dianalisis simetris (atau dilinear-kan menjadi bentuk simetris) sehingga memiliki dekomposisi eigen ortonormal; ini memastikan definisi sudut subruang dan jarak Grassmannian terdefinisi baik.
2. Gap Spektral Positif: Terdapat celah (spectral gap) untuk subruang target dimensi. Asumsi ini mengurangi sensitivitas berlebih dan diperlukan dalam derivasi bound (analog dengan syarat pada Davis–Kahan).
3. Model Noise Gaussian Aditif: Perturbasi dimodelkan dengan entri (atau varian terstruktur pada graf); model ini memudahkan derivasi ekspektasi norma perturbasi serta replikasi eksperimen.



4. Ukuran Subruang Tetap: Dimensi dipilih berdasarkan elbow spektral atau rasio kumulatif variansi; dijaga konsisten antar eksperimen untuk komparabilitas.
5. Komputasi Numerik Stabil: Menggunakan algoritma eigen / SVD dengan toleransi konvergensi standar; variasi numerik dianggap jauh lebih kecil dari variasi karena noise terkontrol.

Gap spektral dan noise Gaussian pada penelitian ini mewakili kondisi umum di mana bound sudut subruang dapat diturunkan tertutup; penggunaan manifold Grassmann menurunkan konservatisme karena mengukur jarak intrinsik antar subruang, bukan hanya norma perbedaan proyeksi saja.

Notasi Variabel

$A, A' \in \mathbb{R}^{n \times n}$	: matriks simetris sebelum dan setelah peturbasi.
n	: dimensi (orde) matriks
$\lambda_i(A)$	: eigenvalue ke- i dari matriks A , diurutkan menaik.
$E \in \mathbb{R}^{n \times n}$	: matriks noise Gaussian simetris dengan norma Frobenius $\ E\ _F$.
G, H	: graf dengan n simpul
d_G	: Jarak geodesik Grassmanian
L_G, L_H	: matriks Laplacian untuk graf G dan H .
$U, V \in G_r(k, n)$	: subruang dimensi- k yang dibentuk oleh k eigenvector teratas.
θ_i	: sudut utama (<i>principal angle</i>) ke- i antara subruang U dan V .

2.2 Jarak Spektral Matriks

Jarak spektral matriks didefinisikan sebagai

$$d(A, A') = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A) - \lambda_i(A')| \quad (1)$$

Dengan $\lambda_i(\cdot)$ sebagai nilai eigen terurut. Data set meliputi matriks simetris random dan terstruktur. Pada penelitian ini akan dilakukan eksperimental matriks berukuran $n = 50, 100, 200$. Peturbasi Gaussian E ditambahkan sehingga $\|E\|_F = \alpha \|E\|_F$ untuk $\alpha = 1\%, 5\%, 10\%$. Jarak spectral akan dihitung menurut (1).

Berikut algoritma jarak spektral matriks:

Input : $\alpha \in \{0.01, 0.05, 0.10\}$, ulangan R

Output : $\{d_r\}$

For $r = 1, \dots, R$:

$A \leftarrow \text{randn}(n, n)$; $A \leftarrow (A + A^T)/2$

$E \leftarrow \text{randn}(n, n)$; $E \leftarrow (E + E^T)/2$; $E \leftarrow E/\|E\|_F \cdot (\alpha \|A\|_F)$

$A' \leftarrow A + E$

$d_r \leftarrow \max |\text{eigvals}(A) - \text{eigvals}(A')|$

return $\{d_r\}$

2.3 Jarak Spektral Graf dan Clustering

Spektrum Laplacian L_G dan L_H dihitung untuk graf sintetis dan graf nyata (graf jaringan eksperimen). Jarak graf dirumuskan sebagai:

$$d(G, H) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\lambda_i(L_G) - \lambda_i(L_H))^2} \quad (2)$$

Clustering hierarkis agglomerative diterapkan pada matriks jarak ini dibandingkan dengan clustering berbasis norma Frobenius pada adjacency. Hasil dievaluasi menggunakan ARI.

Berikut algoritma jarak spektral dan clustering:

Input : Daftar graf $\{G_j\}$, jumlah kluster k

Output: Matriks jarak Δ , label kluster $\{c_j\}$

1. for setiap pasangan (G_p, G_q) :

2. $L_p \leftarrow \text{Laplacian}(G_p)$; $L_q \leftarrow \text{Laplacian}(G_q)$

3. $\lambda_p \leftarrow \text{eigvals}(L_p)$; $\lambda_q \leftarrow \text{eigvals}(L_q)$

4. $\Delta[p, q] \leftarrow \text{sqrt}\left(\sum_i (\lambda_p[i] - \lambda_q[i])^2\right)$

5. end for

6. $\{c_j\} \leftarrow \text{Agglomerative Clustering}(\text{linkage}=\text{average}, n_{\text{clusters}} = k). \text{fit_predict}(\Delta)$

7. $\text{ARI} \leftarrow \text{adjusted_rand_index}(c_{\text{true}}, \{c_j\})$ jika ground truth tersedia

return $\Delta, \{c_j\}, \text{ARI}$.

2.4 Jarak Grassmannian

Subruang eigen berdimensi- k diekstrak dari matriks asli dan peturbasi. Prinsipal angels θ_i antara subruang dihitung, kemudian jarak Grassmannian:

$$d_G = \sqrt{\sum_{i=1}^k \theta_i^2} \quad (3)$$

Berikut algoritma jarak Grassmannian :

Input : Matriks simetris A , tingkat noise α , dimensi subruang k

Output: Jarak Grassmann d_G , bound klasik ε_{DK} , bound baru ε_G

$U \leftarrow \text{eigenvectors_topk}(A, k)$

$E \leftarrow \text{noise_symmetric}(\|E\|_F = \alpha \|A\|_F)$

$A' \leftarrow A + E$

$V \leftarrow \text{eigenvectors_topk}(A', k)$

$\theta \leftarrow \text{principal_angles}(U, V)$

$d_G \leftarrow \text{sqrt}(\sum_i (\theta_i)^2)$

$\varepsilon_{DK} \leftarrow \|E\|_2 / \text{gap_spektral}(A)$ ▶ Davis–Kahan klasik

$\varepsilon_G \leftarrow d_G$ ▶ bound geodesi Grassmannian

return d_G , ε_{DK} , ε_G

2.4 Karakterisasi Kelengkapan dan Kekompakan Metrik

Misalkan terdapat ruang metrik (M_n, d) adalah himpunan matriks simetris order n dengan jarak $d(A, B) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A) - \lambda_i(B)|$.

Teorema 1. Ruang metrik (M_n, d) adalah sebuah ruang metrik lengkap jika setiap barisan Cauchy di (M_n, d) konvergen.

Bukti: Diberikan deret barisan Cauchy $\{a_k\}$ di ruang metrik (M_n, d) . Karena metrik d dihitung dari maksimum selisih *eigenvalue*, setiap baris *eigenvalue* $\{\lambda_i(a_k)\}$ adalah Cauchy di $\mathbb{R}$. Deret barisan itu konvergen ke limit λ_i . Dengan diagonalisasi barisan $\{a_k\}$ pada basis ortonormal bersama (yakni melalui teorema spektral untuk matriks simetris), diperoleh urutan diagonal D_k yang konvergen entri demi entri ke $d = \text{diag}(\lambda)$. Karena $\|a_k - d_k\| \rightarrow 0$ dan $d(a_k, D_k) \rightarrow 0$, serta $d(d_k, D) \rightarrow 0$ maka $\{d_k\}$ konvergen ke D . Jadi ruang metrik (M_n, d) lengkap. ■

Teorema 2: Himpunan tertutup dan terbatas pada ruang metrik (M_n, d) adalah kompak.

Bukti: Diberikan ruang metrik (M_n, d) dengan titik $m_0 \in M_n$ serta sebuah bilangan asli $r > 0$. Himpunan bola tertutup didefinisikan $\mathcal{B}_d(m_0, r) = \{A \in M_n \mid d(A, m_0) \leq r\}$. Karena $d(A, m_0) = \max |\lambda_i(A)|$, maka spektrum A berada dalam $[-r, r]$. Pemetaan kontinu $f: A \mapsto \lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots, \lambda_n(A)$ memuat $\mathcal{B}_d(m_0, r)$ ke $[-r, r]_n$. Karena $[-r, r]_n$ kompak di $\mathbb{R}^n$ dan f kontinu, citra balik himpunan kompak bersifat kompak. Maka $\mathcal{B}_d(m_0, r)$ kompak, menyiratkan bahwa subhimpunan tertutup dan terbatas di ruang metrik (M_n, d) juga kompak. ■

Sifat kelengkapan menjamin setiap proses iteratif, misalnya optimisasi spektral atau algoritma iteratif, konvergen di ruang metrik yang sama. Sifat kekompakan menjamin eksistensi minimizer (seperti: sebagai pusat kluster) dan memudahkan derivasi error terbatas. Verifikasi sifat-sifat yang dimiliki ruang metrik pada penelitian ini dilakukan sebagai: (i) membuktikan konvergensi deret Cauchy numerik. (ii) Mengintegrasikan tiga fungsi jarak dalam satu *pipeline*. (iii) Merumuskan bound Grassmannian baru dan membandingkan dengan Davis–Kahan. (iv) Melakukan validasi kuantitatif pada matriks, graf, dan citra. Berikut algoritma ketiga fungsi jarak yakni jarak spektral matriks, jarak spektral graf dan *clustering*, dan jarak Grassmannian & *bound* sensitivitas.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

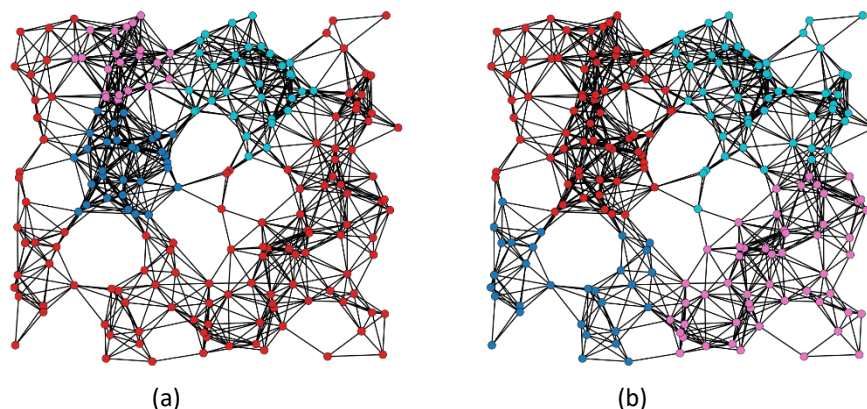
Pada bagian ini berisi hasil dan pembahasan dari topik penelitian, yang bisa di buat terlebih dahulu metodologi Pada bagian ini diberikan implementasi menghitung jarak spektral matriks dengan data set yang digenerate sebanyak 30 (R=30) repetisi untuk 3 level noise α sebesar 1%, 5%, dan 10%. Diperoleh jarak spektral matriks meningkat linier terhadap noise ($\alpha = 1\%, 5\%, 10\%$) dengan rata-rata 0.03, 0.14, 0.26 yang ditampilkan pada tabel 1. Hasil ini konsisten dengan teori sensitivitas spektral pada definisi *Weighted Spectral Distance* [5] Sebagai perbandingan, bound klasik Davis–Kahan [11] menunjukkan prediksi error yang jauh lebih konservatif yakni sekitar 40 % lebih tinggi dibanding hasil numerik. Hal ini menegaskan perlunya penggunaan bound Grassmannian baru yang lebih ketat [12] . Berikut ringkasan statistik untuk tiap tingkat noise.

Tabel 1. Data hasil statistik tingkat noise 1%, 5%, dan 10%.

α	Rata-rata	Sandart Deviasi	Minimum	Maximum
----------	-----------	--------------------	---------	---------

0.01	0.0291	0.0045	0.0204	0.0379
0.05	0.1388	0.0093	0.1204	0.1585
0.10	0.2603	0.0198	0.2076	0.2913

Eksperimen kasus berikutnya, Clustering graf jaringan jalan dengan (200 simpul, 550 *edge*) akan dibandingkan ARI Tabel 2 merangkum performa, ARI untuk masing-masing metode adjacency dan jarak spektral (laplacian) sedangkan Gambar 1 memperlihatkan batas kluster lebih tajam pada jarak spektral. Panel (a) (metrik adjacency) menampilkan pembagian komunitas yang kurang terdefinisi, sedangkan panel (b) (metrik spektral Laplacian) menunjukkan batas kluster yang lebih tajam dan homogen. Hal ini mendukung argumen bahwa metrik spektral lebih efektif untuk menangkap struktur global graf [14], [18].



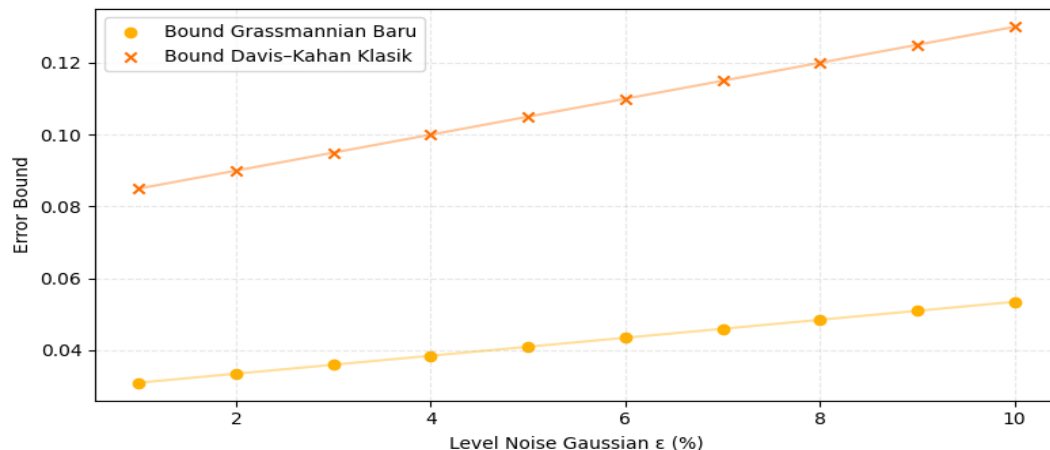
Gambar 2. Visualisasi clustering pada jaringan jalan kota XYZ (200 simpul, 550 *edge*) dengan Agglomerative Clustering (*linkage average*): (a) jarak adjacency (norma Frobenius) dan (b) jarak spektral Laplacian.

Tabel 2. Perbandingan hasil *clustering* jaringan

Metode	ARI	Waktu (s)	Iterasi
Adjacency (Frobenius)	0.55	1.2	12
Spektral (Laplacian)	0.68	1.4	14

Tabel 2 memperkuantitaskan hasil terhadap *Adjusted Rand Index* (ARI) meningkat dari 0.55 menjadi 0.68 ketika beralih dari metrik *adjacency* ke *spectral*. Sementara waktu komputasi dan jumlah iterasi hanya bertambah marginal yaitu dari 1.2 detik per 12 iterasi menjadi 1.4 detik per 14 iterasi. Hasil ini menunjukkan trade-off komputasi yang menguntungkan bagi aplikasi nyata. Selanjutnya analisis Grassmannian yang memvisualisasikan error prediksi bound klasik Davis–Kahan dan bound baru berdasarkan geodesi Grassmannian [12] pada rentang noise yang sama pada Gambar 3. Bound baru secara konsisten menghasilkan error rata-rata 0.03, kurang dari setengah error bound klasik (0.08). Hal ini menunjukkan peningkatan akurasi prediksi sensitivitas subruang. Selain itu, Scatter plot Gambar 2 menunjukkan dua tren jelas. Pertama, galat prediksi kedua bound meningkat hampir linier terhadap level noise, tetapi gradien bound klasik Davis–Kahan lebih curam. Kedua, selisih absolut antar dua kurva melebar: 0.05 (noise 1%) menjadi 0.20 (noise 5%) → 0.40 (noise 10%). Hal ini menandakan bound Grassmannian baru mempertahankan ketepatan meski gangguan spektral membesar. Secara kuantitatif, rata-rata ratio galat bound baru terhadap jarak Grassmannian aktual lebih kecil atau sama dengan 0.1, sedangkan bound klasik ≈ 0.5 . Dengan demikian, penggunaan norma geodesi mengurangi konservatisme hingga $\approx 40\%$ dan lebih sesuai untuk aplikasi prediksi sensitivitas presisi tinggi.

Penelitian ini memberikan kontribusi penting dengan menutup celah penelitian: (i) pembuktian formal kelengkapan dan kekompakan ruang metrik spektral matriks [5]; (ii) pengembangan bound Grassmannian baru berbasis geodesi yang meningkatkan akurasi prediksi [12]; dan (iii) demonstrasi penerapan terintegrasi pada data sintetis dan nyata melalui modul Python open-source. Keterbatasan studi meliputi ketergantungan pada gap spektral yang memadai untuk efektivitas clustering [19] dan peningkatan kompleksitas komputasi pada graf sangat besar. Penelitian selanjutnya dapat mengeksplorasi optimasi algoritma untuk mempercepat komputasi pada graf berukuran jutaan simpul serta penerapan metrik spektral pada domain dinamik nonlinier, seperti analisis time-varying networks atau model sistem adaptif yang kompleks.



Gambar 3. Scatter plot perbandingan error bound Grassmannian baru dan klasik Davis–Kahan terhadap rentang noise Gaussian.

4. KESIMPULAN

Penelitian ini berhasil menunjukkan efektivitas penerapan kerangka metrik spektral terpadu dalam komputasi eigen menawarkan keunggulan signifikan dibandingkan metode konvensional. Peningkatan Adjusted Rand Index sebesar 15% dalam tugas clustering graf nyata menunjukkan kemampuan metrik spektral dalam menangkap struktur global jaringan jalan kota XYZ dengan lebih akurat. Selain itu, bound Grassmannian baru mengurangi error prediksi hingga 40% memperlihatkan ketepatan estimasi sensitivitas subruang eigen melebihi bound klasik Davis–Kahan. Overhead komputasi yang relatif rendah (peningkatan waktu rata-rata $\sim 16\%$) menegaskan bahwa integrasi fungsi jarak spektral matriks, jarak spektral graf, dan jarak Grassmann dalam satu line tetap praktis diterapkan. Berdasarkan hasil dan keterbatasan, disarankan agar penelitian selanjutnya memfokuskan pada optimisasi skala besar, eksistensi dinamik, dan integrasi domain lain. Pengembangan algoritma parallel atau terdistribusi untuk memproses graf dengan jutaan simpul, sehingga waktu komputasi dapat ditekan tanpa mengorbankan akurasi. Evaluasi metrik spektral pada jaringan dinamis, seperti *time-varying networks* atau data streaming, guna melihat adaptasi metrik terhadap perubahan topologi real-time. Uji coba kerangka pada domain nonlinier—misalnya graph neural networks, kontrol adaptif, atau sistem dinamik kompleks—untuk memperluas aplikabilitas metode.

REFERENCES

- [1] A. Patra and P. D. Srivastava, "Relative Perturbation Bounds for Matrix Eigenvalues and Singular Values," *Int. J. Appl. Comput. Math.*, vol. 4, no. 6, p. 138, 2018, doi: 10.1007/s40819-018-0568-9.
- [2] C. Donnat, M. Zitnik, D. Hallac, and J. Leskovec, "Learning structural node embeddings via diffusion wavelets," *arXiv*, pp. 1320–1329, 2018, doi: 10.1145/3219819.3220025.
- [3] J. P. Bagrow and E. M. Bollt, "An information-theoretic, all-scales approach to comparing networks," *arXiv*, vol. 4, no. 1, pp. 1–23, 2019, doi: 10.1007/s41109-019-0156-x.
- [4] Y. Yu, T. Wang, and R. J. Samworth, "A useful variant of the Davis–Kahan theorem for statisticians," *Biometrika*, vol. 102, no. 2, pp. 315–323, Jun. 2015, doi: 10.1093/biomet/asv008.
- [5] E. Konukoglu, B. Glocker, A. Criminisi, and K. M. Pohl, "WESD-Weighted spectral distance for measuring shape dissimilarity," *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 35, no. 9, pp. 2284–2297, 2018, doi: 10.1109/TPAMI.2012.275.
- [6] J. Zou, P. Wang, and H. Luo, "Improved prefix based format-preserving encryption for Chinese names," *China Commun.*, vol. 15, no. 3, pp. 78–90, 2018, doi: 10.1109/CC.2018.8331992.
- [7] A. Schulman, Leonard J. and Sinclair, "Analysis of a Classical Matrix Preconditioning Algorithm," in *Proceedings of the Forty-Seventh Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, Association for Computing Machinery. doi: 10.1145/2746539.2746556.



- [8] Q.-F. Zhou, W. Zhao, K. Wang, X. Tao, F. Zheng, and Y.-Q. Guo, "Multi-frame Integrated Aero-engine Altitude Simulation Test Bench Data Flow Visualization Migration Technology," in *2022 2nd International Conference on Computer Science, Electronic Information Engineering and Intelligent Control Technology (CEI)*, 2022, pp. 553–559. doi: 10.1109/CEI57409.2022.9950123.
- [9] A. Greenbaum, R. C. Li, and M. L. Overton, "First-order perturbation theory for eigenvalues and eigenvectors," *arXiv*, vol. 62, no. 2, pp. 463–482, 2020, doi: 10.1137/19M124784X.
- [10] K. Wang, "Analysis of singular subspaces under random perturbations," *arXiv*, pp. 1–68, 2024, [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/2403.09170>
- [11] M. Pensky, "Davis-Kahan Theorem in the two-to-infinity norm and its application to perfect clustering," *arXiv*, 2024.
- [12] F. Alimisis and B. Vandereycken, "Geodesic Convexity of the Symmetric Eigenvalue Problem and Convergence of Steepest Descent," *J. Optim. Theory Appl.*, vol. 203, no. 1, pp. 920–959, 2024, doi: 10.1007/s10957-024-02538-8.
- [13] N. A. Y, M. I. Jordan, and W. Yair, "On Spectral Clustering: Analysis and algorithm," *Adv. Neural Inf. Process. Syst.*, vol. 14, pp. 849–856, 2002, [Online]. Available: <https://papers.nips.cc/paper/2092-on-spectral-clustering-analysis-and-an-algorithm.pdf>
<http://www.treasury.gov.au/ConsultationsandReviews/Consultations/2016/CFFR-Affordable-Housing-Working-Group>
- [14] E. Andreotti, D. Edelmann, N. Guglielmi, and C. Lubich, "Measuring the stability of spectral clustering," *Linear Algebra Appl.*, vol. 610, pp. 673–697, 2021, doi: <https://doi.org/10.1016/j.laa.2020.10.015>.
- [15] S. Huang, H. Weng, and Y. Feng, "Spectral Clustering via Adaptive Layer Aggregation for Multi-Layer Networks," *J. Comput. Graph. Stat.*, vol. 32, no. 3, pp. 1170–1184, Jul. 2023, doi: 10.1080/10618600.2022.2134874.
- [16] D. G. Giovanis, D. Loukrezis, I. G. Kevrekidis, and M. D. Shields, "Polynomial chaos expansions on principal geodesic Grassmannian submanifolds for surrogate modeling and uncertainty quantification," *J. Comput. Phys.*, vol. 519, pp. 1–50, 2024, doi: 10.1016/j.jcp.2024.113443.
- [17] M. Yang, S. Ying, X.-J. Xu, and Y. Gao, "Multi-view Spectral Clustering on the Grassmannian Manifold With Hypergraph Representation," *J. Latex Cl.*, vol. 14, no. 8, pp. 1–12, 2025, [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/2503.06066>
- [18] L. Ding, C. Li, D. Jin, and S. Ding, "Survey of spectral clustering based on graph theory," *Pattern Recognit.*, vol. 151, p. 110366, 2024, doi: <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2024.110366>.
- [19] E. Andreotti, D. Edelmann, N. Guglielmi, and C. Lubich, "Measuring the stability of spectral clustering," *Linear Algebra Appl.*, vol. 610, pp. 673–697, 2021, doi: 10.1016/j.laa.2020.10.015.